MTH1610
Université de Bretagne-Sud,
Avril 2015

Révisions de Pâques

Calcul Différentiel

Exercice 1. Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{C}^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ solutions du système suivant :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = xy^2 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 y.$$

Solution de l'exercice 1. Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé et la fonction $f_y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_y(x) = f(x,y)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'après la première égalité,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_y'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = xy^2.$$

Donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_y(x) = \frac{x^2 y^2}{2} + g(y).$$

où g est une constante pour la variable x mais dépend de y a priori. Ceci étant vrai pour tout $y \in \mathbb{R}$, on obtient,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \frac{x^2 y^2}{2} + g(y).$$

Puis par la seconde égalité,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 y + g'(y) = x^2 y.$$

Nécessairement, $g'(y) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$ et donc $g(y) = c$ où c est une constante indépendante de x et de y. On conclut que f est solution si et seulement si,

$$\exists c \in \mathbb{R}, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \frac{x^2 y^2}{2} + c.$$

Exercice 2. Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{C}^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ solutions du système suivant :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}.$$

Solution de l'exercice 2. On procède exactement de même que dans l'exercice 1. Cette fois-ci, pour $y \in \mathbb{R}$, l'on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_y(x) = \frac{\ln(x^2+y^2)}{2} + g(y).$$

que l'on dérive par rapport à y,

$$\frac{x}{x^2+y^2} + g'(y) = \frac{-y}{x^2+y^2}.$$

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(y) = \frac{-y-x}{x^2+y^2}.$$

Ce qui est impossible puisque $g'(y)$ est indépendant de x et que le terme de droite n'est pas constant en x (pour tout sceptique, on peut aussi dériver cette égalité en x, le terme de droite a une dérivée nulle et le terme de gauche une dérivée moins jolie mais certainement pas nulle pour tous les x). Conclusion, il n'y a pas de solution.